

XVIII CONCURSO NACIONAL DE MATEMÁTICAS A.N. KOLMOGÓROV

Facultad de Ciencias Actuariales
Universidad Anáhuac México Norte

6 de febrero de 2015

1. Álgebra

Recuerde que si considera que la respuesta correcta **NO** aparece en las opciones que se presentan, entonces en la hoja de respuestas debe marcar la opción **E**.

P.1 Si para factorizar el trinomio $15z^3 - 14z^2 - 7z + 6$ utiliza números enteros, entonces uno de los factores es

- A) $2z - 5$
- B) $5z - 3$
- C) $3z - 2$
- D) $3z + 5$

P.2 Suponga que $y \neq 0$, si desarrolla $\left(y^2 - \frac{1}{2y}\right)^3$ y luego simplifica, entonces el coeficiente del término de tercer grado, es decir, el coeficiente de y^3 , es

- A) $-\frac{3}{2}$
- B) $-\frac{3}{4}$
- C) $\frac{3}{4}$
- D) 0

P.3 Si $x > 0$ y $x \neq 1$, entonces $\log_{x^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2}}\right)$ es igual a

- A) $\frac{2}{3}$
- B) $-\frac{1}{6}$
- C) $\frac{3}{2}$
- D) $\frac{1}{6}$

P.4 Si en la ecuación $\frac{4}{5}x - \frac{7}{15}y = 4$ despeja la variable y , se obtiene

- A) $y = 12x + 4$
- B) $y = \frac{60}{7}x - 60$
- C) $y = \frac{12}{7}x - \frac{60}{7}$
- D) $y = \frac{60}{7} - \frac{12}{7}x$

P.5 Si la ecuación cuadrática $ax^2 - 6x - 3 = 0$ tiene dos raíces iguales, entonces el valor de a debe ser

- A) -3
- B) 3
- C) $\frac{2}{3}$
- D) $-\frac{3}{2}$

P.6 Si resuelve la ecuación cuadrática $12x^2 + 2x = 18x + 3$ y suma sus raíces (soluciones), la suma será igual a

- A) $-\frac{4}{3}$
- B) $\frac{4}{3}$
- C) $\frac{3}{16}$
- D) $-\frac{16}{3}$

P.7 Si resuelve el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 6x + 5y = 13 \\ 10x - 7y = -9 \end{cases}$ y multiplica los valores de x y y que encontró, se obtiene

- A) -1
- B) -3
- C) 3
- D) 1

P.8 La ecuación $9^{z^2} = 3^{z+1}$ tiene dos soluciones, la suma de estas soluciones es

- A) $-\frac{3}{2}$
- B) $\frac{3}{2}$
- C) $-\frac{1}{2}$
- D) $\frac{1}{2}$

P.9 La expresión algebraica $\left(1 - \frac{a}{b}\right)^{-1}$ es igual a (suponga que en el proceso nunca se divide entre cero)

- A) $\frac{1}{b-a}$
- B) $\frac{b}{b-a}$
- C) $\frac{a}{a-b}$
- D) $\frac{b-a}{a}$

P.10 En un problema de optimización de recursos aparece la oración "... se deben producir 8 paquetes por cada anaquel...". Si p representa el número de paquetes y a el número de anaqueles producidos, entonces una ecuación que puede plantearse para modelar la oración anterior es

- A) $8p + a = 0$
- B) $8a + p = 0$
- C) $8a - p = 0$
- D) $a - 8p = 0$

P.11 Si $a = 2, b = \frac{3}{2}, c = \frac{5}{6}, d = -\frac{2}{3}, m = \frac{9}{7}$ y $n = \frac{34}{7}$, entonces el valor numérico de la expresión algebraica $\frac{a-b}{c+d} - \frac{m}{n}$ es

- A) $\frac{3}{26}$
- B) $\frac{-45}{26}$
- C) $\frac{93}{34}$
- D) $\frac{81}{26}$

P.12 Después de realizar las operaciones

$$\frac{2x - 3}{4x^2 - 12x + 9} \div \frac{3x^2 - 5x - 2}{6x^2 - 7x - 3}$$

y reducir a su forma más simple se obtiene

- A) $\frac{1}{x - 2}$
- B) $\frac{2x^2 - 7x + 6}{3 + 2x}$
- C) $\frac{-2x^2 + 7x - 6}{3 + 2x}$
- D) $\frac{2x^2 + 7x + 6}{3 + 2x}$

P.13 Al reducir la expresión $1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$ se obtiene (suponga que en el proceso nunca se divide entre cero)

- A) $\frac{1}{x + 2}$
- B) $x + 2$
- C) $\frac{2}{x - 2}$
- D) $1 + 2x$

P.14 Cuando resuelve la ecuación de primer grado $3x - \frac{x}{10} = \frac{2x}{5} + \frac{7}{4}$, se obtiene

- A) $x = -\frac{10}{7}$
- B) $x = -\frac{7}{10}$
- C) $x = \frac{10}{7}$
- D) $x = \frac{7}{10}$

P.15 Diana Karen, trabajando en una industria maquiladora, puede armar 50 paquetes en 2 horas. Por otra parte, Nelly puede armar 30 paquetes en hora y media. Si trabajan juntas, ¿cuántos paquetes armarían en una hora?

- A) 45 paquetes
- B) 40 paquetes
- C) 35 paquetes
- D) 30 paquetes

P.16 La licenciada Luisa Rojas invirtió \$1,000,000. Una parte la invirtió en una cuenta de ahorros que paga 5% anual y el resto en una inversión un poco más riesgosa que paga 8% anual. Si por concepto de intereses ella obtendría \$71,000 al año, ¿cuánto debe invertir la licenciada Luisa en la cuenta que paga 5% anual?

- A) \$300,000
- B) \$500,000
- C) \$700,000
- D) \$900,000

2. Geometría

Recuerde que si considera que la respuesta correcta NO aparece en las opciones que se presentan, entonces en la hoja de respuestas debe marcar la opción E.

P.17 El conjunto de puntos (x, y) que cumplen con la ecuación $\frac{2x}{x-y} = 20$, está contenido en:

- A) una recta
- B) una circunferencia
- C) una parábola
- D) una hipérbola

P.18 Calcule el área cubierta por el triángulo que forman los ejes coordenados y la recta cuya ecuación es $\frac{x}{6} - \frac{y}{2} = 1$.

- A) 3 unidades cuadradas
- B) 6 unidades cuadradas
- C) 9 unidades cuadradas
- D) 12 unidades cuadradas

P.19 Considere el conjunto definido como $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y^2 = 2\}$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- A) El conjunto \mathcal{A} es una parábola.
- B) El conjunto \mathcal{A} es una circunferencia.
- C) El conjunto \mathcal{A} es una hipérbola.
- D) El conjunto \mathcal{A} no define una sección cónica.

P.20 Considere a los conjuntos definidos como

$$\mathcal{L}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 6x = 10 - 8y\} \text{ y } \mathcal{L}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 5 - 3x\}.$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- A) \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 definen la misma recta
- B) \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 se intersecan en el punto $(0, 5)$
- C) \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 definen dos rectas paralelas
- D) \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 definen dos rectas perpendiculares

P.21 De las tres cantidades que se definen a continuación, ¿cuál es la menor de las tres?

- A) La distancia entre los puntos $(3, 2)$ y $(5, 4)$
- B) La hipotenusa del triángulo formado por los ejes coordenados y la recta cuya ecuación es $y + x = 2$
- C) El radio de la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 6$
- D) Las tres cantidades anteriores son iguales

P.22 Uno de los vértices de la hipérbola con ecuación $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-4)^2}{36} = 1$ es

- A) $(-1, 4)$
- B) $(-2, 2)$
- C) $(-5, 4)$
- D) $(-4, -5)$

3. Trigonometría

Recuerde que si considera que la respuesta correcta **NO** aparece en las opciones que se presentan, entonces en la hoja de respuestas debe marcar la opción **E**.

P.23 ¿Cuál es el valor de la expresión $\sec(23^\circ) \tan(45^\circ) \cos(23^\circ)$?

- A) 0
- B) -1
- C) $+\infty$
- D) 1

P.24 ¿Cuál es el valor exacto de la expresión $\cos 60^\circ \cot 30^\circ + \cos 45^\circ - \operatorname{sen} 225^\circ$,?

- A) 0
- B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- C) 1
- D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

P.25 El periodo de la función $f(x) = 5 \cos(\pi x + 10)$ es igual a

- A) 5
- B) π
- C) $\frac{\pi}{2}$
- D) 2

P.26 En una circunferencia con diámetro de 3 cm, ¿cuál es la medida (en grados) de un arco cuya longitud es igual a 2π cm?

- A) 120°
- B) 180°
- C) 240°
- D) 360°

P.27 Considere el triángulo ABC , el lado AC mide 10 cm, el lado AB mide 12 cm y el lado BC mide 8 cm, entonces $\cos(A)$ es igual a

- A) $\frac{1}{3}$
- B) $\frac{4}{5}$
- C) $\frac{5}{6}$
- D) $\frac{2}{3}$

P.28 La expresión $\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)$ es igual a

- A) $-\cos \alpha$
- B) $\operatorname{sen} \alpha$
- C) $-\operatorname{sen} \alpha$
- D) $\cos \alpha$

4. Cálculo Diferencial

Recuerde que si considera que la respuesta correcta **NO** aparece en las opciones que se presentan, entonces en la hoja de respuestas debe marcar la opción **E**.

Recordemos que si $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow A$ son funciones, g es la función inversa de f si siempre que $a \in A$ entonces $g(f(a)) = a$, y siempre que $b \in B$, $f(g(b)) = b$. Por ejemplo, cuando tanto el dominio como el codominio son el conjunto de todos los números reales (como supondremos en las seis preguntas siguientes), si $f(x) = x + 1$, su inversa es $g(x) = x - 1$. Hablando en forma coloquial, la inversa *deshace* lo que hace la función original.

P.29 La inversa de la función $f(x) = |x + 1|$ es

- A) $g(x) = |x - 1|$
- B) $g(x) = |x| - 1$
- C) $g(x) = -|x| + 1$
- D) $g(x) = -|x| - 1$

P.30 Supongamos que m es distinto de cero. Sea $f(x) = mx + b$. Su inversa es $g(x) =$

- A) $mx - b$
- B) $\frac{x}{m} - b$
- C) $\frac{x}{m} - \frac{b}{m}$
- D) $x - mb$

P.31 Si f tiene inversa g y sabemos que $f(-1) = 2$, entonces

- A) $g(-1) = \frac{1}{2}$
- B) $g(-1) = -2$
- C) $g(2) = 1$
- D) $g(2) = -1$

P.32 Si f tiene inversa y es estrictamente creciente, podemos afirmar sin lugar a dudas que

- A) su inversa es estrictamente decreciente
- B) su inversa es estrictamente creciente
- C) f puede no tener inversa
- D) f tiene derivada positiva

P.33 Si $f(x) = \pi x + e$, la derivada de su inversa es

- A) πx
- B) $\frac{x}{\pi}$
- C) e
- D) $\frac{1}{\pi}$

P.34 Suponga que las funciones f y g son derivables. La regla de la cadena nos permite afirmar que, si g es la inversa de f , entonces

- A) $g'(f(x)) = 1$
- B) $g(f'(x)) = x$
- C) $g'(f(x))f'(x) = x$
- D) $g'(f(x))f'(x) = 1$

5. Probabilidad

Recuerde que si considera que la respuesta correcta **NO** aparece en las opciones que se presentan, entonces en la hoja de respuestas debe marcar la opción **E**.

P.35 La probabilidad de que en una visita al médico sea necesario realizar exámenes de laboratorio es de 40 %, la probabilidad de que el paciente sea referido a un especialista es del 30 % y la probabilidad de que no se requiera ninguno de los dos es de 35 %. Entonces la probabilidad de que un paciente requiera exámenes de laboratorio y sea referido a un especialista es

- A) .05
- B) .12
- C) .18
- D) .25

P.36 Miguel quiere entrar a un club deportivo para conocer mujeres jóvenes solteras. Este club tiene 1,000 miembros. Cada cliente está clasificado como

1. Joven o viejo
2. Hombre o mujer
3. Casado o soltero

De los 1,000 socios, 300 son jóvenes, 460 son hombres y 700 están casados. También pueden clasificarse como 132 hombres jóvenes, 301 hombres casados y 140 personas jóvenes casadas. Finalmente, hay 60 hombres jóvenes casados. ¿Cuántos de los miembros del club son jóvenes, mujeres y solteras?

- A) 280
- B) 42
- C) 48
- D) 88

P.37 Carolina Leticia actualmente cursa una maestría, la cual consta de 16 materias. Hasta el momento, ha cursado y aprobado diez materias. El promedio que ella tiene actualmente es 9.2. En su escuela, para obtener la excelencia académica se requiere tener un promedio de 9.5 o superior. ¿Qué debe hacer para obtener 9.5 o más de promedio, y así obtener la excelencia académica?

- A) Debe obtener al menos 9.5 en cada una de las materias que le falta por cursar
- B) Debe obtener al menos 9.8 en cada una de las materias que le falta por cursar
- C) Debe obtener 10 en cada una de las materias que le falta por cursar
- D) Ya no es posible que obtenga 9.5 como promedio en la maestría

P.38 El siguiente mensaje está impreso en una botella de cierto medicamento de prescripción médica:

ADVERTENCIA: Para aplicaciones en áreas de la piel, hay un 15 % de posibilidades de desarrollar algún tipo de reacción alérgica. Si esto sucede, consulte a su médico.

- A) No utilice el medicamento en su piel, hay buenas posibilidades de desarrollar algún tipo de alergia
- B) Para aplicaciones en la piel, aplicar únicamente 15 % de la dosis recomendada
- C) Si se desarrolla una reacción alérgica, probablemente será en el 15 % de la piel
- D) Alrededor de 15 de cada 100 personas que usan este medicamento, desarrollan una reacción alérgica.

P.39 Con los dígitos del conjunto $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ se forman números de tres dígitos no repetidos. Si se elige al azar uno de tales números, ¿cuál es la probabilidad de que el número elegido sea múltiplo de 5?

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{1}{4}$
- c) $\frac{1}{6}$
- d) $\frac{1}{12}$

P.40 Si se hace un tiro con un par de dados, entonces la probabilidad de que la suma sea menor que 11 es:

- a) $\frac{11}{12}$
- b) $\frac{8}{9}$
- c) $\frac{3}{11}$
- d) $\frac{1}{12}$