

# XVIII CONCURSO NACIONAL DE MATEMÁTICAS A.N. KOLMOGÓROV

Facultad de Ciencias Actuariales  
Universidad Anáhuac México Norte

6 de febrero de 2015

## 1. Álgebra

Recuerde que si considera que la respuesta correcta **NO** aparece en las opciones que se presentan, entonces en la hoja de respuestas debe marcar la opción **E**.

P.1 Si para factorizar el trinomio  $15z^3 - 14z^2 - 7z + 6$  utiliza números enteros, entonces uno de los factores es

- A)  $2z - 5$
- B)  $5z - 3$
- C)  $3z - 2$
- D)  $3z + 5$

P.2 Suponga que  $y \neq 0$ , si desarrolla  $\left(y^2 - \frac{1}{2y}\right)^3$  y luego simplifica, entonces el coeficiente del término de tercer grado, es decir, el coeficiente de  $y^3$ , es

- A)  $-\frac{3}{2}$
- B)  $-\frac{3}{4}$
- C)  $\frac{3}{4}$
- D) 0

P.3 Si  $x > 0$  y  $x \neq 1$ , entonces  $\log_{x^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2}}\right)$  es igual a

- A)  $\frac{2}{3}$
- B)  $-\frac{1}{6}$
- C)  $\frac{3}{2}$
- D)  $\frac{1}{6}$

P.4 Si en la ecuación  $\frac{4}{5}x - \frac{7}{15}y = 4$  despeja la variable  $y$ , se obtiene

- A)  $y = 12x + 4$
- B)  $y = \frac{60}{7}x - 60$
- C)  $y = \frac{12}{7}x - \frac{60}{7}$
- D)  $y = \frac{60}{7} - \frac{12}{7}x$

P.5 Si la ecuación cuadrática  $ax^2 - 6x - 3 = 0$  tiene dos raíces iguales, entonces el valor de  $a$  debe ser

- A)  $-3$
- B)  $3$
- C)  $\frac{2}{3}$
- D)  $-\frac{3}{2}$

P.6 Si resuelve la ecuación cuadrática  $12x^2 + 2x = 18x + 3$  y suma sus raíces (soluciones), la suma será igual a

- A)  $-\frac{4}{3}$
- B)  $\frac{4}{3}$
- C)  $\frac{3}{16}$
- D)  $-\frac{16}{3}$

P.7 Si resuelve el sistema de ecuaciones  $\begin{cases} 6x + 5y = 13 \\ 10x - 7y = -9 \end{cases}$  y multiplica los valores de  $x$  y  $y$  que encontró, se obtiene

- A)  $-1$
- B)  $-3$
- C)  $3$
- D)  $1$

P.8 La ecuación  $9^{z^2} = 3^{z+1}$  tiene dos soluciones, la suma de estas soluciones es

- A)  $-\frac{3}{2}$
- B)  $\frac{3}{2}$
- C)  $-\frac{1}{2}$
- D)  $\frac{1}{2}$

P.9 La expresión algebraica  $\left(1 - \frac{a}{b}\right)^{-1}$  es igual a (suponga que en el proceso nunca se divide entre cero)

- A)  $\frac{1}{b-a}$
- B)  $\frac{b}{b-a}$
- C)  $\frac{a}{a-b}$
- D)  $\frac{b-a}{a}$

P.10 En un problema de optimización de recursos aparece la oración "... se deben producir 8 paquetes por cada anaquel...". Si  $p$  representa el número de paquetes y  $a$  el número de anaqueles producidos, entonces una ecuación que puede plantearse para modelar la oración anterior es

- A)  $8p + a = 0$
- B)  $8a + p = 0$
- C)  $8a - p = 0$
- D)  $a - 8p = 0$

P.11 Si  $a = 2, b = \frac{3}{2}, c = \frac{5}{6}, d = -\frac{2}{3}, m = \frac{9}{7}$  y  $n = \frac{34}{7}$ , entonces el valor numérico de la expresión algebraica  $\frac{a-b}{c+d} - \frac{m}{n}$  es

- A)  $\frac{3}{26}$
- B)  $\frac{-45}{26}$
- C)  $\frac{93}{34}$
- D)  $\frac{81}{26}$

P.12 Después de realizar las operaciones

$$\frac{2x - 3}{4x^2 - 12x + 9} \div \frac{3x^2 - 5x - 2}{6x^2 - 7x - 3}$$

y reducir a su forma más simple se obtiene

- A)  $\frac{1}{x - 2}$
- B)  $\frac{2x^2 - 7x + 6}{3 + 2x}$
- C)  $\frac{-2x^2 + 7x - 6}{3 + 2x}$
- D)  $\frac{2x^2 + 7x + 6}{3 + 2x}$

P.13 Al reducir la expresión  $1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$  se obtiene (suponga que en el proceso nunca se divide entre cero)

- A)  $\frac{1}{x + 2}$
- B)  $x + 2$
- C)  $\frac{2}{x - 2}$
- D)  $1 + 2x$

P.14 Cuando resuelve la ecuación de primer grado  $3x - \frac{x}{10} = \frac{2x}{5} + \frac{7}{4}$ , se obtiene

- A)  $x = -\frac{10}{7}$
- B)  $x = -\frac{7}{10}$
- C)  $x = \frac{10}{7}$
- D)  $x = \frac{7}{10}$

P.15 Diana Karen, trabajando en una industria maquiladora, puede armar 50 paquetes en 2 horas. Por otra parte, Nelly puede armar 30 paquetes en hora y media. Si trabajan juntas, ¿cuántos paquetes armarían en una hora?

- A) 45 paquetes
- B) 40 paquetes
- C) 35 paquetes
- D) 30 paquetes

P.16 La licenciada Luisa Rojas invirtió \$1,000,000. Una parte la invirtió en una cuenta de ahorros que paga 5% anual y el resto en una inversión un poco más riesgosa que paga 8% anual. Si por concepto de intereses ella obtendría \$71,000 al año, ¿cuánto debe invertir la licenciada Luisa en la cuenta que paga 5% anual?

- A) \$300,000
- B) \$500,000
- C) \$700,000
- D) \$900,000

## 2. Geometría

**Recuerde que si considera que la respuesta correcta NO aparece en las opciones que se presentan, entonces en la hoja de respuestas debe marcar la opción E.**

P.17 El conjunto de puntos  $(x, y)$  que cumplen con la ecuación  $\frac{2x}{x-y} = 20$ , está contenido en:

- A) una recta
- B) una circunferencia
- C) una parábola
- D) una hipérbola

P.18 Calcule el área cubierta por el triángulo que forman los ejes coordenados y la recta cuya ecuación es  $\frac{x}{6} - \frac{y}{2} = 1$ .

- A) 3 unidades cuadradas
- B) 6 unidades cuadradas
- C) 9 unidades cuadradas
- D) 12 unidades cuadradas

P.19 Considere el conjunto definido como  $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y^2 = 2\}$ . ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- A) El conjunto  $\mathcal{A}$  es una parábola.
- B) El conjunto  $\mathcal{A}$  es una circunferencia.
- C) El conjunto  $\mathcal{A}$  es una hipérbola.
- D) El conjunto  $\mathcal{A}$  no define una sección cónica.

P.20 Considere a los conjuntos definidos como

$$\mathcal{L}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 6x = 10 - 8y\} \text{ y } \mathcal{L}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 5 - 3x\}.$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- A)  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  definen la misma recta
- B)  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  se intersecan en el punto  $(0, 5)$
- C)  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  definen dos rectas paralelas
- D)  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  definen dos rectas perpendiculares

P.21 De las tres cantidades que se definen a continuación, ¿cuál es la menor de las tres?

- A) La distancia entre los puntos  $(3, 2)$  y  $(5, 4)$
- B) La hipotenusa del triángulo formado por los ejes coordenados y la recta cuya ecuación es  $y + x = 2$
- C) El radio de la circunferencia cuya ecuación es  $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 6$
- D) Las tres cantidades anteriores son iguales

P.22 Uno de los vértices de la hipérbola con ecuación  $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-4)^2}{36} = 1$  es

- A)  $(-1, 4)$
- B)  $(-2, 2)$
- C)  $(-5, 4)$
- D)  $(-4, -5)$

### 3. Trigonometría

Recuerde que si considera que la respuesta correcta **NO** aparece en las opciones que se presentan, entonces en la hoja de respuestas debe marcar la opción **E**.

P.23 ¿Cuál es el valor de la expresión  $\sec(23^\circ) \tan(45^\circ) \cos(23^\circ)$ ?

- A) 0
- B) -1
- C)  $+\infty$
- D) 1

P.24 ¿Cuál es el valor exacto de la expresión  $\cos 60^\circ \cot 30^\circ + \cos 45^\circ - \operatorname{sen} 225^\circ$ ,?

- A) 0
- B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- C) 1
- D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

P.25 El periodo de la función  $f(x) = 5 \cos(\pi x + 10)$  es igual a

- A) 5
- B)  $\pi$
- C)  $\frac{\pi}{2}$
- D) 2

P.26 En una circunferencia con diámetro de 3 cm, ¿cuál es la medida (en grados) de un arco cuya longitud es igual a  $2\pi$  cm?

- A)  $120^\circ$
- B)  $180^\circ$
- C)  $240^\circ$
- D)  $360^\circ$

P.27 Considere el triángulo  $ABC$ , el lado  $AC$  mide 10 cm, el lado  $AB$  mide 12 cm y el lado  $BC$  mide 8 cm, entonces  $\cos(A)$  es igual a

- A)  $\frac{1}{3}$
- B)  $\frac{4}{5}$
- C)  $\frac{5}{6}$
- D)  $\frac{2}{3}$

P.28 La expresión  $\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)$  es igual a

- A)  $-\cos \alpha$
- B)  $\operatorname{sen} \alpha$
- C)  $-\operatorname{sen} \alpha$
- D)  $\cos \alpha$

## 4. Cálculo Diferencial

Recuerde que si considera que la respuesta correcta **NO** aparece en las opciones que se presentan, entonces en la hoja de respuestas debe marcar la opción **E**.

Recordemos que si  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow A$  son funciones,  $g$  es la función inversa de  $f$  si siempre que  $a \in A$  entonces  $g(f(a)) = a$ , y siempre que  $b \in B$ ,  $f(g(b)) = b$ . Por ejemplo, cuando tanto el dominio como el codominio son el conjunto de todos los números reales (como supondremos en las seis preguntas siguientes), si  $f(x) = x + 1$ , su inversa es  $g(x) = x - 1$ . Hablando en forma coloquial, la inversa *deshace* lo que hace la función original.

P.29 La inversa de la función  $f(x) = |x + 1|$  es

- A)  $g(x) = |x - 1|$
- B)  $g(x) = |x| - 1$
- C)  $g(x) = -|x| + 1$
- D)  $g(x) = -|x| - 1$

P.30 Supongamos que  $m$  es distinto de cero. Sea  $f(x) = mx + b$ . Su inversa es  $g(x) =$

- A)  $mx - b$
- B)  $\frac{x}{m} - b$
- C)  $\frac{x}{m} - \frac{b}{m}$
- D)  $x - mb$

P.31 Si  $f$  tiene inversa  $g$  y sabemos que  $f(-1) = 2$ , entonces

- A)  $g(-1) = \frac{1}{2}$
- B)  $g(-1) = -2$
- C)  $g(2) = 1$
- D)  $g(2) = -1$

P.32 Si  $f$  tiene inversa y es estrictamente creciente, podemos afirmar sin lugar a dudas que

- A) su inversa es estrictamente decreciente
- B) su inversa es estrictamente creciente
- C)  $f$  puede no tener inversa
- D)  $f$  tiene derivada positiva

P.33 Si  $f(x) = \pi x + e$ , la derivada de su inversa es

- A)  $\pi x$
- B)  $\frac{x}{\pi}$
- C)  $e$
- D)  $\frac{1}{\pi}$

P.34 Suponga que las funciones  $f$  y  $g$  son derivables. La regla de la cadena nos permite afirmar que, si  $g$  es la inversa de  $f$ , entonces

- A)  $g'(f(x)) = 1$
- B)  $g(f'(x)) = x$
- C)  $g'(f(x))f'(x) = x$
- D)  $g'(f(x))f'(x) = 1$

## 5. Probabilidad

Recuerde que si considera que la respuesta correcta **NO** aparece en las opciones que se presentan, entonces en la hoja de respuestas debe marcar la opción **E**.

P.35 La probabilidad de que en una visita al médico sea necesario realizar exámenes de laboratorio es de 40 %, la probabilidad de que el paciente sea referido a un especialista es del 30 % y la probabilidad de que no se requiera ninguno de los dos es de 35 %. Entonces la probabilidad de que un paciente requiera exámenes de laboratorio y sea referido a un especialista es

- A) .05
- B) .12
- C) .18
- D) .25

P.36 Miguel quiere entrar a un club deportivo para conocer mujeres jóvenes solteras. Este club tiene 1,000 miembros. Cada cliente está clasificado como

1. Joven o viejo
2. Hombre o mujer
3. Casado o soltero

De los 1,000 socios, 300 son jóvenes, 460 son hombres y 700 están casados. También pueden clasificarse como 132 hombres jóvenes, 301 hombres casados y 140 personas jóvenes casadas. Finalmente, hay 60 hombres jóvenes casados. ¿Cuántos de los miembros del club son jóvenes, mujeres y solteras?

- A) 280
- B) 42
- C) 48
- D) 88

P.37 Carolina Leticia actualmente cursa una maestría, la cual consta de 16 materias. Hasta el momento, ha cursado y aprobado diez materias. El promedio que ella tiene actualmente es 9.2. En su escuela, para obtener la excelencia académica se requiere tener un promedio de 9.5 o superior. ¿Qué debe hacer para obtener 9.5 o más de promedio, y así obtener la excelencia académica?

- A) Debe obtener al menos 9.5 en cada una de las materias que le falta por cursar
- B) Debe obtener al menos 9.8 en cada una de las materias que le falta por cursar
- C) Debe obtener 10 en cada una de las materias que le falta por cursar
- D) Ya no es posible que obtenga 9.5 como promedio en la maestría

P.38 El siguiente mensaje está impreso en una botella de cierto medicamento de prescripción médica:

**ADVERTENCIA:** Para aplicaciones en áreas de la piel, hay un 15 % de posibilidades de desarrollar algún tipo de reacción alérgica. Si esto sucede, consulte a su médico.

- A) No utilice el medicamento en su piel, hay buenas posibilidades de desarrollar algún tipo de alergia
- B) Para aplicaciones en la piel, aplicar únicamente 15 % de la dosis recomendada
- C) Si se desarrolla una reacción alérgica, probablemente será en el 15 % de la piel
- D) Alrededor de 15 de cada 100 personas que usan este medicamento, desarrollan una reacción alérgica.

P.39 Con los dígitos del conjunto  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  se forman números de tres dígitos no repetidos. Si se elige al azar uno de tales números, ¿cuál es la probabilidad de que el número elegido sea múltiplo de 5?

- a)  $\frac{1}{2}$
- b)  $\frac{1}{4}$
- c)  $\frac{1}{6}$
- d)  $\frac{1}{12}$

P.40 Si se hace un tiro con un par de dados, entonces la probabilidad de que la suma sea menor que 11 es:

- a)  $\frac{11}{12}$
- b)  $\frac{8}{9}$
- c)  $\frac{3}{11}$
- d)  $\frac{1}{12}$